

**Ruang Barisan Selisih $\ell_p(\Delta)$, $1 < p < \infty$ dan Beberapa Permasalahan
Karakterisasi Produk Tensor $\ell_p(\Delta) \otimes \ell_q(\Delta)$**

Muslim Ansori

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Lampung
Jln. Soemantri Brodjonegoro No. 1 Bandar Lampung 35145
E-mail: ansomath@yahoo.com

ABSTRACT

In this paper we give the notion of difference sequence space $\ell_p(\Delta)$ and study some topological properties of this space. Some Characterization of tensor product $\ell_p(\Delta) \otimes \ell_q(\Delta)$, $1 < p, q < \infty$ are given.

Key Words : difference sequence, tensor product

ABSTRAK

Tulisan ini membahas pengertian suatu ruang barisan selisih $\ell_p(\Delta)$ dan dikaji beberapa sifat topologis ruang ini. Selanjutnya, disajikan beberapa permasalahan produk tensor $\ell_p(\Delta) \otimes \ell_q(\Delta)$, $1 < p, q < \infty$

Kata Kunci : barisan selisih, produk tensor

1. Pendahuluan

Kajian tentang ruang barisan selisih telah banyak dilakukan antara lain oleh Kizmaz [1], yang mendefinisikan ruang barisan selisih $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ dan $c_0(\Delta)$ sebagai berikut:

$$X(\Delta) = \{x = \{x_k\} \subset \mathbb{R} / C : \{\Delta_k\} \in X\},$$

dengan $X = \ell_\infty, c, c_0$ berturut-turut merupakan barisan terbatas, barisan konvergen dan barisan konvergen ke nol dengan norm pada X , dengan $\|x\|_X = \sup_k \{|x_k|\}$

dan $\Delta x = \{\Delta x_k\} = \{x_k - x_{k+1}\}$ untuk semua $k \in N$. Ruang di atas merupakan ruang Banach terhadap norm $\|x\|_{X(\Delta)} = |x_1| + \sup_k \{|\Delta x_k|\}$. Perumuman ruang-ruang tersebut dikerjakan oleh Tripathy dan Esi [4].

Tulisan ini akan memodifikasi pengertian tersebut di atas dengan mengganti ruang ruang $X = \ell_\infty, c, c_0$ dengan ruang ℓ_p , $1 < p < \infty$, yaitu

$$\Delta), 1 < p < \infty$$

$$\ell_p = \left\{ x = \{x_k\} \subset \mathfrak{R} / C : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

dengan norm $\|\cdot\|$,

$$\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Selanjutnya, disajikan beberapa permasalahan produk tensor

$$\ell_p(\Delta) \otimes \ell_q(\Delta), 1 < p, q < \infty.$$

2. Pembahasan

Diberikan ruang barisan selisih $\ell_p(\Delta)$ dengan

$$\ell_p(\Delta) = \left\{ x = \{x_k\} \subset \mathfrak{R} / C : \{\Delta x_k\} \in \ell_p \right\},$$

dan $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$.

Proposisi 2.1 Ruang barisan $\ell_p(\Delta)$ dengan norm $\|\cdot\|$,

$$\|x\| = |x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

merupakan ruang linear bernorma.

Bukti: Di ambil sebarang skalar α dan β dan $x = \{x_k\}, y = \{y_k\} \in \ell_p(\Delta)$. Maka berlaku

$$\begin{aligned} \|\alpha x + \beta y\| &= \|\{\alpha x_k\} + \{\beta y_k\}\| = \|\{\alpha x_k + \beta y_k\}\| \\ &= |\alpha x_1 + \beta y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta(\alpha x_k + \beta y_k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\alpha x_1 + \beta y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(\alpha x_k + \beta y_k) - (\alpha x_{k+1} + \beta y_{k+1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\alpha x_1 + \beta y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(\alpha x_k - \alpha x_{k+1}) + (\beta y_k - \beta y_{k+1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |\alpha x_1 + \beta y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha x_k - \alpha x_{k+1}| + |\beta y_k - \beta y_{k+1}|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

menggunakan ketidaksamaan Minkowski

$$\begin{aligned}
&\leq |\alpha x_1| + |\beta y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(\alpha x_k - \alpha x_{k+1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(\beta y_k - \beta y_{k+1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(\alpha x_k - \alpha x_{k+1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} + |\beta y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(\beta y_k - \beta y_{k+1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq |\alpha| |x_1| + |\alpha| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(x_k - x_{k+1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} + |\beta| |y_1| + |\beta| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(y_k - y_{k+1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq |\alpha| \left(|x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(x_k - x_{k+1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) + |\beta| \left(|y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(y_k - y_{k+1})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
&\leq |\alpha| \left(|x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) + |\beta| \left(|y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
&= |\alpha| \|x\| + |\beta| \|y\|.
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, $\ell_p(\Delta)$ merupakan ruang linear.

Selanjutnya, jika $x = \theta = \{0, 0, \dots\}$ maka $\|\theta\| = 0$. Sebaliknya, jika $\|x\| = 0$, maka

$$\|x\| = |x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ dan } |\Delta x_k| = 0 \text{ untuk setiap } k \in N.$$

Misal $k = 1$, yaitu $|\Delta x_1| = 0 \Rightarrow |x_1 - x_2| = 0$. Karena $x_1 = 0$ maka $x_2 = 0$. Proses ini diteruskan untuk $k = 2, 3, \dots$ sehingga diperoleh $x_k = 0, k = 1, 2, \dots$ atau $x = (x_k) = \theta$.

Untuk $\alpha = \beta = 1$, jelas berlaku

$$\|x + y\| \leq \left(|x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) + \left(|y_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) = \|x\| + \|y\|$$

untuk setiap $x, y \in \ell_p(\Delta)$.

Terakhir, untuk sebarang skalar α dan $x \in \ell_p(\Delta)$ berlaku

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\| &= |\alpha x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta(\alpha x_k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k - \alpha x_{k+1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha| |x_1| + |\alpha| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k+1}|^p \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\Delta), 1 < p < \infty$$

$$= |\alpha| \left(|x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k+1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) = |\alpha| \|x\|.$$

Oleh karena itu, $(\ell_p(\Delta), \|\cdot\|)$ merupakan ruang linear bernorma. ■

Teorema 2.2 $(\ell_p(\Delta), \|\cdot\|)$ merupakan ruang Banach.

Bukti : Di ambil sebarang barisan Cauchy $\{x^n\} \subset \ell_p(\Delta)$ dengan $x^n = \{x_k^n\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_p(\Delta)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Maka untuk sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positif n_0 sehingga untuk setiap bilangan bulat positif $m, n \geq n_0$ berlaku

$$\|x^n - x^m\| < \varepsilon.$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} \|x^n - x^m\| &= |x_1^n - x_1^m| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta(x_k^n - x_k^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |x_1^n - x_1^m| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(x_k^n - x_k^m) - (x_{k+1}^n - x_{k+1}^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |x_1^n - x_1^m| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(x_k^n - x_{k+1}^n) - (x_k^m - x_{k+1}^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |x_1^n - x_1^m| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|(x_k^n - x_{k+1}^n)| + |(x_k^m - x_{k+1}^m)|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |x_1^n - x_1^m| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(x_k^n - x_{k+1}^n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(x_k^m - x_{k+1}^m)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \end{aligned} \quad (2.2a)$$

sehingga

$$|(x_k^n - x_k^m)| < \varepsilon$$

untuk setiap bilangan bulat positif $m, n \geq n_0$ dan $k = 1, 2, \dots$. Oleh karena itu $\{x_k^n\}$ merupakan barisan Cauchy di \mathfrak{R}/C . Karena \mathfrak{R}/C lengkap, maka terdapat $x_k \in \mathfrak{R}/C$ sehingga

$$|(x_k^n - x_k)| < \varepsilon \quad (2.2b)$$

untuk setiap $n \geq n_0$ dan $k = 1, 2, \dots$.

Berdasarkan (2.2a) diperoleh $\{\Delta x_k^n\}$ merupakan barisan Cauchy di \mathfrak{R}/C untuk $k = 1, 2, \dots$. Oleh karena itu terdapat $\Delta x_k \in \mathfrak{R}/C$ sehingga

$$|\Delta x_k^n - \Delta x_k| < \frac{\varepsilon}{2^{(k+1)}}. \quad (2.2c)$$

Berdasarkan (2.2a), (2.2b) dan (2.2c) diperoleh

$$|(x_1^n - x_1)| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k^n - \Delta x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < 3\varepsilon.$$

untuk setiap $n \geq n_0$ dan $k = 1, 2, \dots$.

Namakan $(x_k) = x$, berakibat $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x^n - x^m\| = \|x^n - x\| < 3\varepsilon$. Terbukti $(\ell_p(\Delta), \|\cdot\|)$ merupakan ruang Banach. ■

Sebagai motivasi untuk menyuguhkan permasalahan produk tensor $\ell_p(\Delta) \times \ell_q(\Delta)$, terlebih dahulu dibahas produk tensor $\ell_p \times \ell_q, 1 < p, q < \infty$.

Diberikan ruang barisan $\ell_p, \ell_q, 1 < p, q < \infty$. Produk tensor $\ell_p \times \ell_q$ dari ℓ_p dan ℓ_q didefinisikan sebagai penutup dari ruang linear yang dibangun oleh $\{x \otimes y : x \in \ell_p, y \in \ell_q\}$

dengan

$$x \otimes y = x \cdot y^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} (y_1, y_2, \dots) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Diberikan matriks takhingga (a_{ij}) . Ruang matriks Lebesgue $\ell_q(N \times N)$, didefinisikan

sebagai berikut: $\ell_q(N \times N) = \left\{ (a_{ij}) : \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \infty \right\}$. Kaitan antara produk tensor

$\ell_p \times \ell_q$ dan ruang matriks Lebesgue $\ell_r(N \times N)$ disajikan dalam Lemma berikut.

Lemma 2.3

(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) dengan

(i) $r = \max(p, q)$

(ii) $(uv)^r \leq u^r v^r$ untuk setiap $u, v \in [0, 1]$

$$\Delta), 1 < p < \infty$$

(iii) $\|x \otimes y\| \leq \|x\| \|y\|$ untuk setiap $x \in \ell_p, y \in \ell_q$

(iv) $\ell_p \otimes \ell_q \subset \ell_r (N \times N)$

Bukti: (i) \Rightarrow (ii): (i) $\Rightarrow u^{r-p} v^{r-q} \leq 1$ untuk setiap $u, v \in [0, 1]$ yang berakibat (ii).

(ii) \Rightarrow (iii) : untuk sebarang

$$0 \neq x = (x_1, x_2, \dots)^T \in \ell_p(\Delta) \text{ dan } 0 \neq y = (y_1, y_2, \dots)^T \in \ell_q(\Delta)$$

berlaku

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{|x_i|}{\|x\|} \right)^p = 1 \text{ dan } \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{|y_j|}{\|y\|} \right)^q = 1.$$

Karena

$$\left\| \frac{x \otimes y}{\|x\| \|y\|} \right\|^r = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{|x_i y_j|}{\|x\| \|y\|} \right)^r \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{|x_i|}{\|x\|} \right)^p \left(\frac{|y_j|}{\|y\|} \right)^q \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{|x_i|}{\|x\|} \right)^p \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{|y_j|}{\|y\|} \right)^q = 1. \blacksquare$$

(iii) \Rightarrow (iv) Di ambil sebarang $x \otimes y \in \ell_p \times \ell_q$ dengan $x \in \ell_p, y \in \ell_q$. Oleh karena itu, terdapat matriks (a_{ij}) dengan $x \otimes y = (a_{ij}) = (x_i y_j)$ dan karena $\|x \otimes y\| \leq \|x\| \|y\|$ untuk setiap $x \in \ell_p, y \in \ell_q$, maka

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^r &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |x_i y_j|^r \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |x_i|^r |y_j|^r \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^r \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^r = \|x\|^r \|y\|^r < \infty \blacksquare \end{aligned}$$

3. Simpulan Dan Saran

Berdasarkan uraian di atas dapat dikemukakan beberapa hal sebagai berikut:

1. Ruang barisan $(\ell_p(\Delta), \|\cdot\|)$ dengan norm $\|x\| = |x_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ merupakan ruang linear bernorma yang lengkap.
2. Berdasarkan Lemma 2.3 dan Kesimpulan 1, Permasalahan baru berkaitan dengan sifat-sifat produk tensor $\ell_p(\Delta) \times \ell_q(\Delta)$ dengan definisi norm tertentu.

3. Aplikasi ruang-ruang tersebut pada teori operator matriks takhingga dari ruang barisan selisih $\ell_p(\Delta)$ ke ruang barisan selisih $\ell_q(\Delta)$.

4. Daftar Pustaka

- [1] Kizmaz,H. (1981), *On Certain Sequence Spaces*, Canad. Math. Bull.,24,169-176.
- [2] Kamthan,P.K and Gupta,M. (1981), *Sequence Spaces and Series*, Marcel Dekker Inc. New York.
- [3] Maddox, I.J, (1970), *Elements of Functional Analysis*, Cambridge Univ. Press.
- [4] Tripathy, B.C and Esi H. (2006), *A new type of Difference Sequence Spaces*, Intl. Journal of Science and Tech., 1, 1, 11-14.